Apresentação da UC de Estatística I

- **A UC está dividida entre aulas teóricas e aulas práticas**

  As aulas teóricas serão dadas de forma remota. Estas aulas destinam-se a apresentar os conceitos e resultados essenciais previstos no programa da disciplina, e as indicações indispensáveis para orientar o estudo dos alunos. Exemplos ilustrativos complementarão a apresentação.

  As aulas práticas serão dadas de forma presencial/remota. Estas aulas destinam-se a esclarecer dúvidas e a dar indicações sobre a resolução dos exercícios recomendados e indicados nas aulas teóricas. Os alunos deverão trabalhar previamente os exercícios. Por princípio, os docentes não resolverão nas aulas práticas, de forma exaustiva e completa, os exercícios previstos.

- **A avaliação desta UC é feita por exame**

  Calculadoras científicas são permitidas. Calculadoras gráficas ou com capacidade de comunicação não são permitidas.

  Telemóveis, computadores, ou qualquer aparelho com capacidade de comunicação não são permitidos.

  As tabelas e o formulário disponibilizados na página da cadeira podem ser utilizados durante o exame, desde que não contenham anotações.

1. Introdução

- **Estatística**: Termo com vários significados. Como ciência estuda as características de determinada população a partir da observação de uma amostra.
- Tratando-se de uma inferência indutiva, as conclusões estão sujeitas a **incerteza**. A **Teoria da Probabilidade** permite quantificar a incerteza.
- A teoria da probabilidade é a teoria matemática que se ocupa dos métodos de análise que são comuns ao estudo dos fenómenos aleatórios;
- **Definição 2.1 – Experiência aleatória**
  - O conjunto dos resultados possíveis é conhecido antecipadamente.
  - O resultado da experiência nunca pode ser previsto de forma exata, mesmo que se desenvolvam todos os esforços controlar as circunstâncias relevantes para o resultado.
- Exemplos: Baralho de cartas, euromilhões, ….

2. Espaço de resultados. Acontecimentos

- **Definição 2.2 – Espaço de resultados ou espaço-amostra, Ω**
  Conjunto fundamental (não vazio) formado por todos os resultados que é possível obter quando se efetua determinada experiência aleatória. Os resultados individuais, pontos ou elementos de Ω, são representados por ω.

- Tendo em conta a natureza do conjunto Ω, os espaços de resultados podem classificar-se do seguinte modo:
  a) Discretos (finitos ou infinitos numeráveis);
  b) Contínuos (infinitos não numeráveis).

- **Definição 2.3 – Acontecimento**
  Chama-se acontecimento a um subconjunto do espaço Ω.
- **Acontecimentos elementares:** subconjuntos $\{\omega\} \subset \Omega$ formados por um só elemento.
- Como qualquer conjunto é subconjunto de si próprio tem-se que Ω é um acontecimento.

- **Definição 2.4 – Realização de um acontecimento.**
  Ao efetuar a experiência aleatória associada com Ω, diz-se que o acontecimento $A \subset \Omega$ se realiza, se o resultado da experiência é um ponto que pertence ao conjunto A.

Exemplo 2.8 – Lançam-se 2 dados e observa-se o número de pontos saído no primeiro dado, i, e no segundo, j.

O espaço de resultados é então, $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,3,4,5,6\}$.

Existem 36 acontecimentos elementares e podem definir-se, entre outros, os acontecimentos:

- $A = \{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\} \equiv$«saída de apenas 4 ou 5 pontos»;
- $B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\} \equiv$«saída de soma de pontos inferior a 5».

Representar graficamente o espaço de resultados e os acontecimentos A e B.

Definir o acontecimento C, «saída de dois valores iguais nos dados», e representá-lo.

Álgebra dos acontecimentos (análoga à álgebra dos conjuntos)

- **Implicação de acontecimentos** – a realização de A implica a realização de B se e só se, qualquer elemento de A é elemento de B ($A \subset B$).
- **Identidade de acontecimentos –** A e B são acontecimentos idênticos se e só se, possuem os mesmos elementos ($A = B$).

  Note-se que $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$
- **União de acontecimentos:** $A \cup B$
- **Intersecção de acontecimentos :** $A \cap B$
- Dois acontecimentos A e B são **incompatíveis** ou **mutuamente exclusivos** se e só se $A \cap B = \varnothing$.
- **Acontecimento impossível:** $\varnothing$ (conjunto vazio),
- **Diferença de acontecimentos:** $A - B$.
- Acontecimento **contrário** ou **complementar** de A, $\overline{A} = \Omega - A$ é o acontecimento que se realiza se e só se A não se realiza. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = \Omega$.

- **Propriedades das operações definidas sobre acontecimentos.**

1) Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2) Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

3) Distributividade: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4) Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

"o contrário da união é a intersecção dos contrários" e "o contrário da intersecção é a união dos contrários".

- Operações sobre infinidades **numeráveis** de acontecimentos.
  - A **união numerável** de $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ é o acontecimento $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ que se realiza se e só se pelo menos um A_j se realiza;
  - A **intersecção numerável** de $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ é o acontecimento $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ que se realiza se e só se todos os A_j se realizam;

Estas operações verificam as propriedades da associatividade, comutatividade, distributividade de uma em relação à outra e as leis de De Morgan.

3. Medida de probabilidade. Axiomática de Kolmogorov.

- Probabilidade: medida do grau de incerteza de um acontecimento.
- A teoria da probabilidade ensina a **calcular a probabilidade de certos acontecimentos a partir das probabilidades de outros acontecimentos**. **Não ensina a atribuir as probabilidades "originais"**
- **Definição 2.5 – Medida de probabilidade.**
  A medida de probabilidade é uma função P que a cada acontecimento $A, A \subset \Omega$, faz corresponder um número real, $P(A)$, probabilidade do acontecimento A, que verifica os três axiomas seguintes:

  P1 – $P(A) \geq 0$.

  P2 – $P(\Omega) = 1$.

  P3 – Se A e B forem acontecimentos incompatíveis, $A \cap B = \varnothing$, então,
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

  P3* – Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ forem acontecimentos em número infinito numerável, dois a dois incompatíveis, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, então,
  $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$.

Propriedades da medida de probabilidade:

1) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

2) $P(\varnothing) = 0$.

3) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

6) $P(A) \leq 1$.

A propriedade 2 estabelece que o **acontecimento impossível tem probabilidade igual a zero**.

Contudo, **nada impede que se encontrem acontecimentos com probabilidade nula que não sejam impossíveis** (o próximo capítulo ajudará a esclarecer esta questão).

Demonstrar as propriedades 1 e 2.

(basta pensar que $\Omega = A \cup \bar{A}$ e que $A \cap \bar{A} = \varnothing$)

Exemplo 2.12 – Em determinada população, 9.8% das pessoas adquirem a revista A, 22.9% a revista B e 5.1% ambas as revistas. Admite-se que a medida de probabilidade é a proporção dos indivíduos da população que adquirem as revistas. Sejam:

Acontecimentos $A \equiv$ «adquirir a revista A»;

$B \equiv$ «adquirir a revista B».

(a) A probabilidade de adquirir somente a revista A:

(b) A probabilidade de adquirir pelo menos uma das revistas:

(c) A probabilidade de não adquirir nem a revista A, nem a revista B

4. Interpretações do conceito de probabilidade.

- **Interpretação clássica** → resultados "igualmente possíveis ou prováveis".

  Ω finito, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, e admita-se $P(\omega_j) = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,...,n$.

  Seja $A = \{\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, ..., \omega_{\alpha_m}\}$ então

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{nº de casos favoráveis a } A}{\text{nº de casos possíveis}}$$

- **Exemplo:** voltar ao exemplo 2.8 (lançamento de 2 dados) e calcular as probabilidades de A, B e C

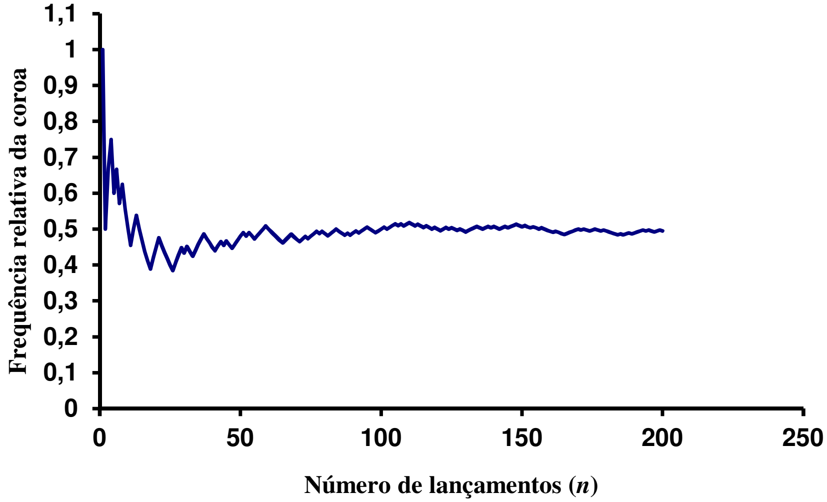
- **Interpretação frequencista** → a probabilidade de um acontecimento define-se como o limite da frequência relativa numa sucessão infinita de provas idênticas e independentes, $f_n(A) = F_n(A)/n$.

  Quando n aumenta, verifica-se empiricamente que a **frequência relativa** tende a **estabilizar** em torno de um número que os frequencistas tomam como $P(A)$.

  Pode então dizer-se que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$,
  $\lim_{n\to\infty} P\left(\left| f_n(A) - P(A) \right| < \varepsilon \right) = 1$ (**lei dos grandes números**)

  Note-se que, fixado n, as frequências relativas verificam a axiomática de Kolmogorov.

- **Exemplo 2.17 –** (interpretação frequencista) Lançou-se 200 vezes uma moeda de aparência regular e registou-se ao fim de cada lançamento a frequência relativa do acontecimento $A \equiv$ «saída da coroa».



- **Interpretação subjectiva** ou personalista – Que fazer quando a situação **não é repetitiva nem simétrica?**

5. Métodos de contagem

• Definição 2.6 – Regra fundamental da contagem

Suponha-se que uma experiência aleatória é composta por k etapas. Se na primeira etapa há m_1 casos possíveis, na segunda etapa há m_2 casos possíveis,…, na k-ésima etapa há m_k casos possíveis, então, o número total de resultados da experiência aleatória, combinando as k etapas, é $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$.

3 conceitos importantes (definições 2.7, 2.8 e 2.9)

- Amostra ordenada
- Amostragem sem reposição
- Amostragem com reposição

Conceitos de **análise combinatória** a ter presentes:

- **Arranjos.** A partir de um conjunto com n elementos distintos, quantos grupos com k elementos $(1 \le k \le n)$ que **diferem pela natureza e pela ordem** desses elementos se podem formar?

$$A_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- **Arranjos completos.** Quando nos arranjos entram **elementos repetidos** do conjunto dado diz-se que se trata de arranjos com repetição ou arranjos completos, $\alpha_k^n = n^k$.

- **Permutações**. As permutações de um conjunto de n elementos são arranjos de n elementos tomados n a n, isto é, cada grupo é formado por todos os elementos do conjunto. O número de permutações de n elementos, P_n, é então

$$P_n = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

- **Combinações**. A partir de um conjunto com n elementos distintos, quantos grupos com k elementos $(1 \leq k \leq n)$ que **diferem pela sua natureza, mas não pela ordem** com que foram seleccionados, se podem formar?

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Permutações de elementos não todos distintos**. Dados n elementos dos quais k_1 são de um primeiro tipo e não se distinguem entre si, k_2 são de um segundo tipo e não se distinguem entre si e, finalmente, k_r são de um último tipo, também indistintos, havendo no total r tipos diferentes com, $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, o número de permutações de n elementos não todos distintos é dado pela expressão,

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$ **(Coeficiente multinomial)**

Quando se consideram apenas dois grupos, isto é, $r = 2$, tem-se

$$\frac{n!}{k_1!k_2!} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \binom{n}{k_1} = \binom{n}{k_2}$$ **(Coeficiente binomial)**

Uma aplicação particularmente importante da análise combinatória consiste na resolução do seguinte problema: considere-se uma população com N elementos, dos quais M possuem determinado atributo. Escolhida uma amostra com n elementos $(n \geq 0)$, qual a probabilidade de nela se encontrarem x elementos com o referido atributo $(0 \leq x \leq n)$?

A resposta à pergunta depende de a tiragem ser feita sem ou com reposição.

- Tiragem sem reposição → **esquema hipergeométrico**.

  número de casos possíveis: combinações de N elementos tomados n a n.

  número de casos favoráveis: a população possui M elementos com o atributo em estudo e, portanto, $N-M$ sem este atributo; a amostra tem x elementos com o referido atributo e, portanto $n-x$ sem ele. Então o nº de casos favoráveis é,

$$\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}.$$

  Supondo que $x \geq \max\{0, n-(N-M)\}$ e $x \leq \min\{n, M\}$, a probabilidade vem

$$P_s = \binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} \Big/ \binom{N}{n}$$

- **Exemplo 2.23** – Considere-se uma população de 100 computadores dos quais 10 sofrem de determinada avaria. Escolhida aleatoriamente, **sem reposição**, uma amostra de 5 computadores qual a probabilidade de nenhum estar avariado?

- Tiragem com reposição → **esquema binomial**. O resultado vem

$$P_r = \frac{M^x (N-M)^{n-x} \binom{n}{x}}{N^n} = \binom{n}{x} \frac{M^x}{N^x} \frac{(N-M)^{n-x}}{N^{n-x}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

onde $p = M / N$ é a proporção do atributo na população.
No esquema binomial, apenas interessa aquela **proporção** e não os valores de N e de M.

- **Exemplo 2.23** – Retome-se o exemplo 2.23 considerando uma tiragem **com reposição.**

6. Probabilidade condicionada. Teorema de Bayes

- **Exemplo 2.24 –** Lançam-se 2 dados, um vermelho e outro verde, estando-se interessado na soma de pontos obtida.

  Acontecimento A = « obter uma soma igual a 5 pontos»

$$P(A) = 4/36 = 1/9.$$

  No entanto, se se souber que no dado verde se obteve 4 pontos, acontecimento B, a probabilidade de A deve ser reavaliada, já que nesse caso a realização de A equivale agora a obter 1 ponto com o dado vermelho.

  Como a probabilidade de A é agora calculada depois de saber que B se realizou, tem-se a **probabilidade condicionada** $P(A \mid B) = 1/6$.

- **Definição 2.10 – Probabilidade condicionada**

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se} \quad P(B) > 0.$$

- A probabilidade condicionada é uma medida de probabilidade (verifica os axiomas);
- A probabilidade condicionada pode interpretar-se como uma reavaliação da probabilidade de um acontecimento quando se tem a informação de que outro acontecimento se realizou. Uma vez conhecida a realização desse outro acontecimento, B, o espaço de resultados deixa de ser Ω e passa a ser B.

Exemplo anterior - $P(B) = 1/6$ sai 4 no dado verde

$P(A \cap B) = 1/36$ sai 4 no verde e 1 no vermelho

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

- **Exemplo 2.27 –** De um baralho habitual de 52 cartas um jogador recebe, de forma aleatória, uma "mão" de 13 cartas. A probabilidade de um jogador receber, numa "mão", exatamente 3 cartas do naipe de copas (acontecimento B) pode ser calculada com base no esquema hipergeométrico e vem:

$$P(B) = \binom{13}{3} \times \binom{39}{10} / \binom{52}{13} = 0.2863.$$

  Caso se saiba que nessa "mão" o jogador recebeu exatamente 5 cartas de espadas (acontecimento A), a probabilidade anterior tem de ser recalculada por forma a incorporar esta informação. Utilizar a definição para obter

$$P(B / A) = 0.3058$$

  Observação: Neste caso poder-se-ia calcular esta probabilidade diretamente pois receber 3 copas numa "mão" em que se sabe terem sido recebidas 5 espadas é equivalente a receber 3 copas em 8 cartas distribuídas depois de retiradas as espadas (52-13=39).

• **Regra da multiplicação das probabilidades:**

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B) = P(A) \times P(B \mid A) \quad \text{com } P(B) > 0 \text{ e/ou } P(A) > 0$$

Esta regra generaliza-se facilmente para três ou mais acontecimentos. Por exemplo, se $P(A \cap B) > 0$,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B \mid A) \times P(C \mid A \cap B).$$

• **Definição 2.11 – Partição do espaço de resultados**

Diz-se que a classe de acontecimentos $\{A_1, A_2, ..., A_m, ...\}$ é uma partição de Ω quando,

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \ (i \neq j) \text{ e } \bigcup_j A_j = \Omega$$

Consequência da definição de partição: $P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j) = 1.$

- **Teorema 2.1 (regra da probabilidade total) –** Se $\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots\}$ é uma partição de Ω e se $P(A_j) > 0,\ (j = 1,2,\ldots,m,\ldots)$, vem, para qualquer acontecimento B,

$$P(B) = \sum_{j=1} P(A_j)P(B \mid A_j)$$

Note-se que $P(B) = \sum_{j=1} P(A_j)P(B \mid A_j) = \sum_{j=1} P(A_j \cap B)$

Demonstração:

$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \bigcup_j A_j\right) = P\left(\bigcup_j \left(B \cap A_j\right)\right)$ distributividade

$= \sum_{j=1} P(A_j \cap B)$ probabilidade da união de acontecimentos incompatíveis

Teorema 2.2 (Bayes) – Se $\{A_1, A_2, ..., A_m, ...\}$ é uma partição de Ω e se $P(A_j) > 0$ $(j = 1,2,\ldots,m,\ldots)$, vem, para qualquer acontecimento B a verificar $P(B) > 0$,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad j = 1,2,...,m,...$$

Demonstração:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$ definição de prob. condicionada

$$= \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{P(B)}$$ idem

$$= \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$ regra da probabilidade total

Exemplo 2.34 – Uma companhia seguradora distribui os segurados por três classes, A_1, A_2, A_3, consoante o menor ou o maior risco que lhes atribui; em certo momento, a carteira de apólices é tal que $P(A_1) = 0.35$, $P(A_2) = 0.50$ e $P(A_3) = 0.15$. Sabe-se também que a probabilidade de os segurados de cada classe terem um ou mais acidentes durante um ano é, respectivamente, 0.01, 0.04 e 0.15. A companhia, naturalmente, nunca tem a certeza de conhecer a classe a que pertence o subscritor de uma apólice.
Se um segurado tiver um ou mais acidentes durante um ano, que conclusões podem retirar-se quanto à classe a que pertence?

7. Acontecimentos independentes

- **Definição 2.12 – Acontecimentos independentes**
  Dois acontecimentos A e B, do mesmo espaço de resultados, dizem-se independentes, se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- A definição é válida para $P(A) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Assim, se A for tal que $P(A) = 0$, então A é independente de qualquer outro acontecimento e, em particular, é independente de $\varnothing$ e de Ω.

- **Teorema 2.3 –** Se A e B forem acontecimentos independentes, então,

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{se} \quad P(B) > 0,$$
$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{se} \quad P(A) > 0.$$

Fazer a demonstração.

Acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis traduzem relações diferentes:

- Se $P(A)=0$, A é independente de qualquer outro acontecimento.
- A concorrência das duas situações (independência e incompatibilidade) somente se verifica nessa hipótese restrita.
- Se $P(A)>0$ e $P(B)>0$, os acontecimentos A e B, caso sejam incompatíveis **não podem ser independentes**, já que $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0\neq P(A)P(B)>0$.

- **Teorema 2.4 –** Se os acontecimentos A e B são independentes, também o são A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e B, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Demonstrar o 1º caso:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\times P(B) \qquad A \text{ e } B \text{ independentes}$$

$$=P(A)\times(1-P(B))=P(A)\times P(\overline{B})$$

Quando se consideram **três acontecimentos**, A, B e C, a **situação complica-se**. Podem ocorrer as seguintes situações:

- Os acontecimentos são dois a dois independentes e

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C).$$

- Os acontecimentos são dois a dois independentes e

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

- Verifica-se que, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, mas, por exemplo, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

- **Definição 2.13 – Independência completa ou mútua**

  Os acontecimentos A, B e C do mesmo espaço de resultados dizem-se completamente independentes ou mutuamente independentes se e só se verificarem as condições seguintes:

  - $P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A \cap C) = P(A)P(C), P(B \cap C) = P(B)P(C),$
  - $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$

  (Independentes 2 a 2 e independentes 3 a 3) – exemplos 2.39 e 2.40 do livro

- **Definição 2.14 – Independência condicional**

  Dois acontecimentos A e B são independentes condicionalmente em relação a um acontecimento C quando,

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C).$$

  A independência condicional **não** implica independência no sentido corrente a não ser obviamente quando $C = \Omega$.

  Ver exemplo 2.42 do livro.